Digitalna obrada signala

Primena DFT – Izračunavanje inverzne DFT

DFT $$X[k] = X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad k = 0,1,2,\ldots,N-1$$

IDFT $$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\frac{2\pi}{N}k\right) e^{j2\pi kn/N}, \quad n = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Pristup

$$x^*[n] = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}\right]^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn}$$

odnosno, za izračunavanje inverzne DFT može se iskoristiti isti program kao za direktnu DFT, samo što se kao ulazna sekvenca koristi $X^*[k]$ umesto $X[k]$ i što se za izlaznu sekvencu dobija $x^*[n]$ umesto $x[n]$. To praktično znači da se elementima imaginarnog dela sekvence $X[k]$ promeni znak i da u dobijenoj izlaznoj sekvenci, $x^*[n]$, treba promeniti znak elementima imaginarnog dela sekvence. Operacije promene znaka vrlo malo povećavaju složenost algoritma za izračunavanje inverzne DFT.

Digitalna obrada signala

Primena DFT – Izračunavanje inverzne DFT

A može i dalje

$$x^*[n] = \left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-kn}\right]^* = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X^*[k] W_N^{kn}$$

$$jx^*[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} jX^*[k] W_N^{kn}$$

$$x[n] = j\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} jX^*[k] W_N^{kn}\right]^*$$

$$jX^*[k] = \mathrm{Im}\left(X[k]\right) + j\,\mathrm{Re}\left(X[k]\right)$$

za izračunavanje inverzne DFT može se koristiti bilo koji FFT potprogram, ali pri njegovom pozivu treba zameniti mesta realnom i imaginarnom delu sekvence $X[k]$. Time se po završetku rada programa dobijaju korektni vektori realnog i imaginarnog dela sekvence $x[n]$, ali takođe u izmenjenom redosledu. Ovaj pristup, kao što se vidi, ne zahteva nikakve dodatne operacije. Jedini zahtev je da se realni i imaginarni delovi korišćenih sekvenci smeštaju u dva realna vektora, a ne u jedan kompleksni vektor.

Digitalna obrada signala

Primena DFT – Izračunavanje DFT dve realne sekvence

Ukoliko se efikasnim FFT algoritmom izračunava DFT realne sekvence, u procesu izračunavanja pojaviće se veliki broj množenja i sabiranja u kojima je jedan od argumenata jednak nuli. To je posledica činjenice da je imaginarni deo ulazne sekvence jednak nuli. Pretpostavimo da imamo dve realne sekvence iste dužine N, $x_1[n]$ i $x_2[n]$. Od njih se može formirati kompleksna sekvenca $x[n]$ na sledeći način:

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n], \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X[k] = X_1[k] + jX_2[k], \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Kako izdvojiti

$$x_1[n] = \frac{x[n] + x^*[n]}{2}$$

$$x_2[n] = \frac{x[n] - x^*[n]}{2j}$$

$$\longrightarrow$$

$$X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2}$$

$$X_2[k] = \frac{X[k] - X^*[N-k]}{2j}$$

$$x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[N-k]$$

Digitalna obrada signala

Primena DFT – Izračunavanje DFT realne sekvence duzine 2N

Podela na dve sekvence

$$x_1[n] = f[2n], \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$x_2[n] = f[2n+1], \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

gde je $f[n]$ originalna sekvenca dužine $2N$.

$$x[n] = x_1[n] + jx_2[n], \quad n = 0,1,\ldots,N-1$$

$$X_1[k] = \frac{X[k] + X^*[N-k]}{2}$$

$$X_2[k] = \frac{X[k] - X^*[N-k]}{2j}$$

$$\longrightarrow$$

$$F[k] = \sum_{n=0}^{N-1} f[2n] W_{2N}^{2nk} + \sum_{n=0}^{N-1} f[2n+1] W_{2N}^{(2n+1)k} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x_1[n] W_N^{nk} + W_{2N}^{k} \sum_{n=0}^{N-1} x_2[n] W_N^{nk}, \quad k = 0,1\ldots,N-1$$

$$F[k] = X_1[k] + W_{2N}^{k} X_2[k], \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

$$F[k+N] = X_1[k] - W_{2N}^{k} X_2[k], \quad k = 0,1,\ldots,N-1$$

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Linearna konvolucija

y[n] = x[n]∗h[n]

dužina y[n] $N_Y = N_X + N_h - 1$

Ako želimo da saznamo šta "ima" u *y[n]*

DFT sekvenca *y[n] se računa u* N_Y *tačaka*

$$Y[k] = X[k]H[k],\ 0 \le k \le N_Y - 1$$

Znači dopuniti nulama x i h tako da imaju isti broj elemenata

$N_Y = N$

a onda može da se primeni cirkularna konvolucija

$$y[m] = x[m] \otimes h[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] h\langle m-n \rangle_N = \sum_{n=0}^{N-1} h[n] x\langle m-n \rangle_N, \quad m = 0,1,\ldots,N-1$$

?

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Izbor

$$N = 2^p$$

Logičan korak: Efikasno izračunavanje DFT preko FFT

1. Broj operacija za izračunavanje *X[k] i H[k] iz x[n] i h[n] ,*
2. Broj operacija za izračunavanje *Y[k] = X[k]H[k], k = 0,1,..., N −1,*
3. Broj operacija za izračunavanje *y[n] iz Y[k] .*

$$N_M = 3(2N\log_2 N) + 4N = 6N\log_2 N + 4N$$

$$N_A = 3(3N\log_2 N) + 2N = 9N\log_2 N + 2N$$

Za razliku od toga direktna primena konvolucije po definiciji

$$N'_M = N_x N_h$$

$$N'_A = (N_x - 1)(N_h - 1)$$

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Primer

Nx = 512, Nh = 512, N = 1024.

Onda je

$N_M = 65536$ *i* $N_A = 94208$,

$N_M' = 262144$ *i* $N_A' = 261121$.

potrebno je svega 25% množenja i 36% sabiranja
u odnosu na broj operacija kod direktne metode.
Ukoliko se primeni neki efikasniji FFT algoritam ušteda može biti i veća.

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Šta raditi ako su dužine sekvenci *x[n] i h[n]* jako različite?

(I obično je sekvenca *x[n] znatno duža)*

Efikasno izračunavanje linearne konvolucije dve sekvence izrazito različitih dužina može se ostvariti ako se duža sekvenca podeli na segmente, pa se onda formiraju parcijalne konvolucije između segmenata duže sekvence i kraće sekvence. Takav metod poznat je pod nazivom

Blok konvolucija.

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju

x[n] se deli na S parcijalnih sekvenci dužine L prema izrazu

$$x[n] = \sum_{i=0}^{S-1} x_i[n], \quad n = 0,1,\ldots,SL-1$$

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL \le n \le (i+1)L-1 \\ 0, & \text{za druge vrednosti } n \end{cases}$$

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N_h-1} \sum_{i=0}^{S-1} x_i[n-m]h[m] = \sum_{i=0}^{S-1} \sum_{m=0}^{N_h-1} x_i[n-m]h[m] = \sum_{i=0}^{S-1} c_i[n]$$

$c_i[n]$ predstavlja linearnu konvoluciju segmenata ulazne sekvence x[n] i sekvence h[n]

Svaka parcijalna konvolucija ima *$L + N_h - 1$ elemenata različitih od nule*

Dopunjavanje nulama parcijalnih segmenata *x* i *h* da bi se koristila cirkularna, konvolucija odnosno DFT odnosno FFT

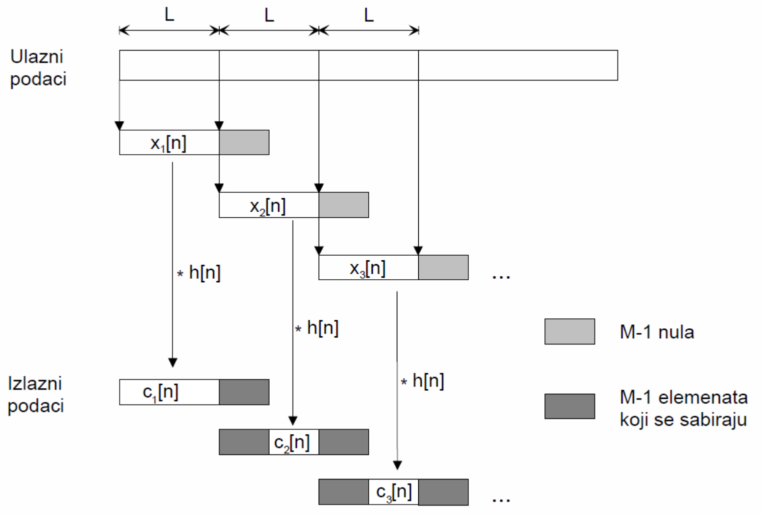
- Proširenje sekvenci $x_i[n]$ i h[n] do dužine N sa nultim vrednostima
- DFT sekvence h[n]
- S puta DFT parcijalnih sekvenci $x_i[n]$
- Množenjem H[k] sa $X_i[k]$ član po član dobija se $C_i[k]$
- Iz $C_i[k]$ se inverznom DFT dobijaju parcijalne konvolucije $c_i[n]$
- Sabiranje $c_i[n]$

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence ne preklapaju

preklopi i saberi (engl. overlap-and-add)



Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence preklapaju

Podela ulazne sekvence koja omogućava da se izlazna sekvenca formira direktno!

Uzimati samo one elemente parcijalnih konvolucija koji predstavljaju korektan rezultat!

Šta je korektan rezultat?

Prelazni režim pri konvoluciji ulazne sekvence sa impulsnim odzivom $h[n]$ *dužine* $N_h - 1$ *traje* $N_h - 1$ odbiraka.

Zbog toga se segmentacija ulazne sekvence vrši tako da se segmenti preklapaju za $N_h - 1$ elemenata.

Dužina svakog segmenta $L + N_h - 1$

Prvi segment se proširuje sa $N_h - 1$ *nula sa leve strane*

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence <u>preklapaju</u>

Prosirena sekvenca x[n] se deli na S parcijalnih sekvenci dužine L+N_h-1 prema izrazu

$$x_i[n] = \begin{cases} x[n], & iL - N_h + 1 \le n \le (i+1)L - 1 \\ 0, & \text{za druge vrednosti } n \end{cases}$$

$$y[n] = \sum_{i=0}^{S-1} y_i[n]$$

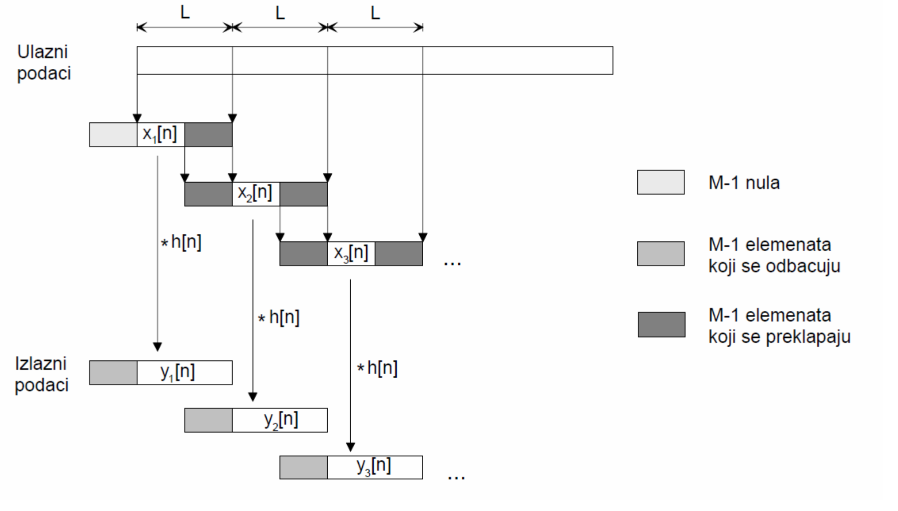
y_i[n] rezultati parcijalnih cirkularnih konvolucija iz kojih je izbačeno prvih N_h −1 elementa

Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija kada se segmenti ulazne sekvence <u>preklapaju</u>

selektuj i sačuvaj (engl. select-save ili overlapsave)



Digitalna obrada signala

Primena DFT - Efikasno izračunavanje linearne konvolucije

Blok konvolucija

Problem izbora L

Kriterijum: Da bi se dobilo što efikasnije izračunavanje
Što manji broj aritmetičkih operacija!